第7講　空間図形

27 座標空間内で，O(0, 0, 0)，A(1, 0, 0)，B(1, 1, 0)，C(0, 1, 0)，D(0, 0, 1)，E(1, 0, 1)，F(1, 1, 1)，G(0, 1, 1) を頂点にもつ立方体を考える．この立方体を対角線 OF を軸にして回転させて得られる回転体の体積を求めよ．

《10 京大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

28 xyz 空間の中で，(0，0，1) を中心とする半径 1 の球面 S を考える．点 Q が(0，0，2) 以外の S 上の点を動くとき，点 Q と点 P(1，0，2) の 2 点を通る直線 l と平面 $z=0$ との交点を R とおく．R の動く範囲を求め，図示せよ．

《15 京大・文系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

29 xyz 空間で，原点 O を中心とする半径 $\sqrt{6}$ の球面 S と 3 点 $(4,\ 0,\ 0)$，$(0,\ 4,\ 0)$，$(0,\ 0,\ 4)$ を通る平面 α が共有点を持つことを示し，点 $(x,\ y,\ z)$ がその共有点全体の集合を動くとき，積 xyz が取り得る値の範囲を求めよ．

《11 京大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

30　空間内に四面体 ABCD を考える．このとき，4 つの頂点 A，B，C，D を同時に通る球面が存在することを示せ．

《11 京大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第７講　空間図形

27 座標空間内で，O(0, 0, 0)，A(1, 0, 0)，B(1, 1, 0)，C(0, 1, 0)，D(0, 0, 1)，E(1, 0, 1)，F(1, 1, 1)，G(0, 1, 1) を頂点にもつ立方体を考える．この立方体を対角線 OF を軸にして回転させて得られる回転体の体積を求めよ．

《10 京大・理系》

【答】 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi$

【解説】 $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$ とおくと $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\left(-\dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$ より $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OF}}=0$ で $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{OF}}|\neq 0$ より A から OF に下ろした垂線の足は P.

同様に $\mathrm{Q}\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$ とおくことにより，E から OF に下ろした垂線の足が Q であることがわかる．

次に，S(1, 0, s)($0\leqq s\leqq 1$) とおき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{\sqrt{3}k+1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{SR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\sqrt{3}k-s=0$ となるような s は $s=\sqrt{3}k$ なので，このとき，S から OF に下ろした垂線の足は R となり，$\overrightarrow{\mathrm{SR}}=\left(\dfrac{\sqrt{3}k-2}{3},\ \dfrac{\sqrt{3}k+1}{3},\ \dfrac{-2\sqrt{3}k+1}{3}\right)$ より $|\overrightarrow{\mathrm{SR}}|^2=2k^2-\dfrac{2}{3}\sqrt{3}k+\dfrac{2}{3}$ である．また，$0\leqq s\leqq 1$ より $0\leqq k\leqq\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ なので求める体積は

$$
\begin{aligned}
&|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2\pi\times|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\times\frac{1}{3}+\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\pi|\overrightarrow{\mathrm{SR}}|^2\,dk+|\overrightarrow{\mathrm{EQ}}|^2\pi\times|\overrightarrow{\mathrm{QF}}|\times\frac{1}{3}\\
=\ &\frac{2}{3}\pi\times\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{1}{3}+\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\pi\left(2k^2-\frac{2}{3}\sqrt{3}k+\frac{2}{3}\right)dk+\frac{2}{3}\pi\times\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{1}{3}\\
=\ &\frac{4\sqrt{3}}{27}\pi+\pi\left[\frac{2}{3}k^3-\frac{\sqrt{3}}{3}k^2+\frac{2}{3}k\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\\
=\ &\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{3}\pi}
\end{aligned}
$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

28　xyz 空間の中で，$(0,\ 0,\ 1)$ を中心とする半径 1 の球面 S を考える．点 Q が $(0,\ 0,\ 2)$ 以外の S 上の点を動くとき，点 Q と点 $\mathrm{P}(1,\ 0,\ 2)$ の 2 点を通る直線 l と平面 $z=0$ との交点を R とおく．R の動く範囲を求め，図示せよ．

《15 京大・文系》

【答】 略

【解説】 点 Q が $(0,\ 0,\ 2)$ 以外の S 上の点なので，
$\mathrm{Q}(p,\ q,\ r)$(ただし $p^2+q^2+(r-1)^2=1$ かつ $r\neq 2$) と表せる．

R は $z=0$ 上の点より $\mathrm{R}(X,\ Y,\ 0)$ とおくと，Q は直線 PR 上の点より実数 t を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t\overrightarrow{\mathrm{OR}}\\ &= ((X-1)t+1,\ Yt,\ -2t+2)\end{aligned}$$

と表せるので，$p^2+q^2+(r-1)^2=1$ より

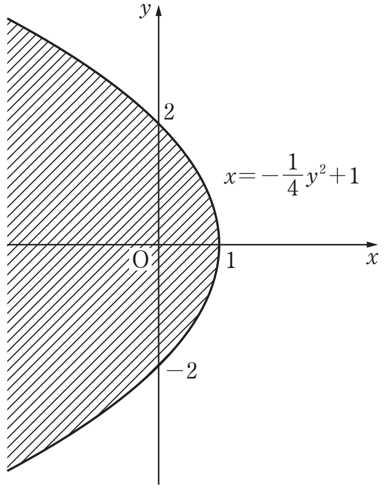
$\{(X-1)t+1\}^2+(Yt)^2+(-2t+1)^2=1 \iff \{(X-1)^2+Y^2+4\}t^2+2(X-3)t+1=0$ …①

ここで，①は $t=0$ を解にもたないので $r=-2t+2\neq 2$ を満たす．

よって①が実数解をもつ条件を考えると，

$$(X-3)^2-\{(X-1)^2+Y^2+4\}\geqq 0 \iff X\leqq -\frac{1}{4}Y^2+1$$

より $x\leqq -\dfrac{1}{4}y^2+1$ が R の領域で，図示すると下図(境界を含む)のようになる．



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

29 xyz 空間で，原点 O を中心とする半径 $\sqrt{6}$ の球面 S と 3 点 $(4,\ 0,\ 0)$，$(0,\ 4,\ 0)$，$(0,\ 0,\ 4)$ を通る平面 α が共有点を持つことを示し，点 $(x,\ y,\ z)$ がその共有点全体の集合を動くとき，積 xyz が取り得る値の範囲を求めよ．

《11 京大・理系》

【答】 $\dfrac{50}{27} \leqq xyz \leqq 2$

【解説】 A$(4,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 4,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ 4)$ とする．

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\left(\dfrac{4}{3},\ \dfrac{4}{3},\ \dfrac{4}{3}\right)$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ より H は平面 α 上であり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})=\left(\frac{4}{3},\ \frac{4}{3},\ \frac{4}{3}\right)\cdot(-4,\ 4,\ 0)=0,$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})=\left(\frac{4}{3},\ \frac{4}{3},\ \frac{4}{3}\right)\cdot(-4,\ 0,\ 4)=0$$

より $\mathrm{OH}\perp\alpha$ なので，H は球面 S の中心から平面 α に下ろした垂線の足である．

このとき $\mathrm{OH}=\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$ より $\sqrt{6}-\mathrm{OH}=\dfrac{3\sqrt{6}-4\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\sqrt{54}-\sqrt{48}}{3}>0$ なので球面 S と平面 α は共有点をもつ．

また，その共有点は，平面 α 上の H を中心とする半径 $\sqrt{(\sqrt{6})^2-\left(\dfrac{4}{3}\sqrt{3}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ の円周上の点である．

ここで，$\vec{a}=\left(\dfrac{2}{3},\ -\dfrac{1}{3},\ -\dfrac{1}{3}\right)$，$\vec{b}=\left(0,\ -\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ とおくと $\vec{a}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{HA}}$，$\vec{b}=\dfrac{\sqrt{3}}{12}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ より $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平面 α 上のベクトルで，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ と $|\vec{a}|=|\vec{b}|=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ より，球面 S と平面 α の共有点は，$0\leqq\theta<2\pi$ を満たす実数 θ を用いて

$$\begin{aligned}(x,\ y,\ z) &= \overrightarrow{\mathrm{OH}}+(\cos\theta)\vec{a}+(\sin\theta)\vec{b}\\ &= \left(\frac{4+2\cos\theta}{3},\ \frac{4-\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta}{3},\ \frac{4-\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta}{3}\right)\end{aligned}$$

と表せる．

このとき

$$\begin{aligned}xyz &= \frac{1}{27}(4+2\cos\theta)(4-\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta)(4-\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta)\\ &= \frac{2}{27}(\cos\theta+2)(4\cos^2\theta-8\cos\theta+13)\end{aligned}$$

となるので，$\cos\theta=t$ とおいたものを $f(t)$ とすると $f(t)=\dfrac{2}{27}(4t^3-3t+26)$ より

$f'(t)=\dfrac{8}{9}\left(t-\dfrac{1}{2}\right)\left(t+\dfrac{1}{2}\right)$ なので

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

t	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$	$\frac{50}{27}$	↗	2	↘	$\frac{50}{27}$	↗	2

よって $\boldsymbol{\frac{50}{27} \leqq xyz \leqq 2}$ である.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

30　空間内に四面体 ABCD を考える．このとき，4つの頂点 A，B，C，D を同時に通る球面が存在することを示せ．

《11 京大・理系》

【答】 略

【解説】 △ABC，△ABD を含む平面をそれぞれ α，β とし，△ABC，△ABD の外心をそれぞれ P，Q とする．

点 P を通り平面 α に垂直な直線を l，点 Q を通り平面 β に垂直な直線を m とし，線分 AB の中点を M とすると，直線 l と m は，M を通り AB に垂直な平面上に存在する．

また点 D は平面 α 上にはないので，$\overrightarrow{\mathrm{MD}}$ は α と平行になることはない．つまり直線 l と直線 m は平行になることも一致することもない．

よって直線 l と直線 m はただ1つの交点をもつのでその点を R とすると，R は直線 l 上より RA＝RB＝RC となり，また R は直線 m 上より RA＝RB＝RD となる．

よって R は4点 A，B，C，D から等距離にある点なので，4点 A，B，C，D を同時に通る球面の存在が示された．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。